BLOCH-KATO 予想の紹介(その1) : NON-ARCHIMEDEAN LOCAL FIELD 上の理論(代数的整数論と数論的幾何学)

都筑, 暢夫

数理解析研究所講究録
925巻 1995年 34-42

BLOCH-KATO 予想の紹介 (その1)
— NON-ARCHIMEDEAN LOCAL FIELD 上の理論 —

広島大学理学部 都築 暢夫

§1. はじめに

大域体上の代数群の Tamagawa 数は、Tamagawa、Weil、Ono らにより研究され、Artin motif の L-関数の $s=1$ での特殊値はこれらの方法で解釈できる。([W])

kを代数体、$T=\mathrm{Res}_{k/\mathbf{Q}}\mathbf{G}_{m/k}$とする。$S=S_f\cup\{\infty\}$ を有理素点の有限集合で、S_fはkで分岐する有限素点を含む有限素点の集合とする。$\mathcal{T}$を Tの Spec $\mathbf{Z}[1/S_f]$ 上の model とし、同型

$$\omega : \det \mathrm{Lie}(\mathcal{T}) \to \mathbf{Z}[1/S_f]$$

を一つ固定する。各素点p に対して、

$$\exp : \mathrm{Lie}_{\mathbf{Q}_p}(T) \to T(\mathbf{Q}_p)$$

を exponential 写像とし、ωで決まる $\mathrm{Lie}_{\mathbf{Q}_p}(T)$ の Haar measure から exp で誘導される $T(\mathbf{Q}_p)$ 上の Haar measure を$\mu_{p,\omega}$とする。すると、$p\notin S$に対して、

$$\mu_{p,\omega}(\mathcal{T}(\mathbf{Z}_p))=\prod_{v|p}\frac{1-N_v}{N_v}$$

となる。ただし、vはkの素点でpの上にあるものを走り、N_vで剰余体の位数をあらわす。これは、Tの L-関数

$$L_S(T,s)=\prod_{p\notin S}L_p(T,s)=\prod_{p\notin S}\prod_{v|p}\frac{1}{1-N_v^{-s}}$$

の local factor の $s=1$ での値の逆数に他ならない。$T^0(\mathbf{A_Q})$ を $T(\mathbf{Q})$ で割ったとき compact になる $T(\mathbf{A_Q})$ の最大部分群とする。$T^0(\mathbf{A_Q})$ 上の Tamagawa measure を

$$\mu_\omega=|\lim_{s\to1}\{(s-1)L_S(T,s)\}^{-1}|\prod_{p\in S}\mu_{p,\omega}\prod_{p\notin S}L_p(T,1)\mu_{p,\omega}$$

と定めると、μ_ωは Sの取り方によらない。Tの Tamagawa 数を

$$\mathrm{Tam}(T)=\mu_\omega(T^0(\mathbf{A_Q}))$$

で定義する。積公式より、これはωの取り方によらない。

さて、$\text{Ш}(T) = \ker(\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}, T) \to \prod_{p \leqq \infty} \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T))$ とおくとき、G に対する Tamagawa 数予想とは、

$$\mathrm{Tam}(T) = \frac{\sharp \mathrm{Pic}(T)}{\sharp \text{Ш}(T)}$$

が成り立つというもので、この場合には成り立つことが知られている。この等式を L-関数の特殊値の言葉で言い換えると、

$$\begin{aligned}\lim_{s \to 1}(s-1)L_S(T, s) &= \mu_\omega(T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A_Q})) \\ &= \mu_{\infty,\omega}(O_k^\times \backslash (k \bigotimes \mathbf{R})^0) \prod_{p \in S_f} \mu_{p,\omega}((O_k \bigotimes \mathbf{Z}_p)^\times) \\ &= \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} R_k h_k}{u_k \sqrt{d_k}} \prod_{p \in S_f} \prod_{v|p} \frac{N_v - 1}{N_v}\end{aligned}$$

となり、これは代数体 kの Dedekind-ζ-関数の極限公式に他ならない。ただし、$r_1(r_2)$ は kの実数体 (複素数体) への埋め込みの個数、R_k、h_k、u_k、d_kは kの単数基準、類数、1 のべき根の個数、判別式をあらわす。

Bloch-Kato 予想とは pure motif の L-関数の特殊値を数論的対象で書き表す予想であり、代数群に対する Tamagawa 数予想の motif における拡張の形で述べられる。代数群の場合は有理点や exponential 写像があり、上の例のようにして adelic points 上に Tamagawa measure を定義することができ、Tamagawa 数が決まる。比較して、Motif に対する Tamagawa 数の自然な拡張を得るためには、まず、有理点や exponential 写像の概念の拡張が必要になる。これらを定義することは、近年の p 進 Hodge 理論の発展によって可能になった。(BSD 予想については Bloch が Tamagawa 数予想と類似の形で定式化した。([B])) また、exponential 写像は explicit reciprocity law として解釈され、Bloch-Kato 予想は岩沢理論の拡張とみることもできる。([K1][K3][K4][P])

本稿では、p 進 Hodge 理論を利用して p 進 motivic points および exponentioal 写像を定義する方法について解説する。

§2. p-進 Hodge 理論からの準備

この節では p-進 Hodge 理論について復習する。(詳しくは [FI]、[I]、[Fo2]、 [Fo3] を見よ。) 記号を次のように定める。

p : 素数
K : $\mathbf{Q}_p$の有限次代数拡大体
K_0 : Kの中での $\mathbf{Q}_p$の最大不分岐拡大体
G_K : Kの絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$
φ : K_0の Frobenius; $\varphi(x) \equiv x^p \pmod{(p)} \quad (x \in O_K^\times)$
K^{nr} : Kの最大不分岐拡大体
$\mathrm{H}^i(K, \cdot)$: G_Kの i 次連続 cohomology 群

(2.1.) 環 $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}, \mathbf{B}_{\mathrm{crys}}$ ([Fo1][BK])

$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$および $\mathbf{B}_{\mathrm{crys}}$を Fontaine の定義した環とすると、両者は以下の性質を持つ。
(ア) $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$は

$$\bigcup \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^i = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}, \qquad \bigcap \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^i = 0$$

を満たす減少 filtration$\{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^i\}$ をもつ$\bar{K}$-algebra で、filtration から定まる位相に関して完備かつ filtration を保つ連続な G_K-作用をもつ。また、標準射

$$\log : \mathbf{Z}_p(1) \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^1$$

は、同型 $\mathbf{C}_p(i) \cong \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^i/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{i+1}$ を導く。ただし、$\mathbf{C}_p$は$\bar{K}$の p 進完備化をあらわし、(i) は i 次 Tate-twist をあらわす。

(イ) $\mathbf{B}_{\mathrm{crys}}$は G_K-作用を保つ $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$の K_0^{nr}-subalgebra で、K_0^{nr}の Frobeniusf^{nr}と可換な Frobenius 射 $f : \mathbf{B}_{\mathrm{crys}} \to \mathbf{B}_{\mathrm{crys}}$をもつ。また、(ア) の標準射 log での $\mathbf{Z}_p(1)$ の像は $\mathbf{B}_{\mathrm{crys}}$に入る。

(ウ) $\mathrm{H}^0(K, \mathbf{B}_{\mathrm{crys}}) = K_0, \qquad \mathrm{H}^0(K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) = K$

(エ) 次の上下 2 つの G_K-加群の列

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbf{Q}_p & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{B}_{\mathrm{crys}}^{f=1} \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^0 & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \cap & & \downarrow{\scriptstyle x \mapsto (0,x)} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{Q}_p & \xrightarrow[\alpha]{} & \mathbf{B}_{\mathrm{crys}} \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^0 & \xrightarrow[\beta]{} & \mathbf{B}_{\mathrm{crys}} \oplus \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

は、完全である。ただし、$\alpha(x) = (x, x)$、$\beta(x, y) = (x - f(x), x - y)$ とする。

(2.2.) de Rham 表現、crystalline 表現

lを素数とする。V_lがl進表現であるとは、V_lが連続な G_K-作用をもつ有限次元 $\mathbf{Q}_l$-vector space のことをいう。T_lが l進表現 V_lの lattice とは、G_K-作用を保つ V_lの部分自由 $\mathbf{Z}_l$-加群で、$V_l = \mathbf{Q}_l \otimes_{\mathbf{Z}_l} T_l$を満たすものとする。さらに、$T$が$\hat{\mathbf{Z}}$-表現であるとは、連続な G_K-作用をもつ階数有限自由$\hat{\mathbf{Z}}$-加群とする。

Vを p 進表現とする。Vに対して、

$$\mathrm{DR}(V) = \mathrm{H}^0(K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V), \qquad \mathrm{DR}(V)^i = \mathrm{H}^0(K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^i \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$$
$$\mathrm{Crys}(V) = \mathrm{H}^0(K, \mathbf{B}_{\mathrm{crys}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$$

と定める。前者は、減少 filtration 付きの K-vector space で、後者は $\mathbf{B}_{\mathrm{crys}}$の Frobenius fから定まるφ-linear な射 fをもつ K_0-vector space になる。Vに対して

$$\dim_K \mathrm{DR}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V \qquad (\dim_{K_0} \mathrm{Crys}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V)$$

が成り立つとき、Vを de Rham 表現 (crystalline 表現) という。V、Wを de Rham 表現 (crystalline 表現) とすると、tensor 積 $V \otimes W$および双対 V^*も de Rham 表現 (crystalline 表現) になる。([Fo1]) また、K上の proper smooth variety Xが good reduction をもてば、p 進 etale cohomology $\mathrm{H}_{et}^*(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p)$ は crystalline 表現になる。([FM][Fa][K2]$\cdots$)

l進表現 Vに対して、

$$P(V, u) = \begin{cases} \det(1 - f_K u \mid \mathrm{H}^0(K^{nr}, V)) \in \mathbf{Q}_l[u] & (l \neq p) \\ \det(1 - f^{[K_0 : \mathbf{Q}_p]} u \mid \mathrm{Crys}(V)) \in K_0[u] & (l = p) \end{cases}$$

と定める。ここで、f_KはG_Kの geometric frobenius (剰余体上で $p^{[K_0:\mathbf{Q}_p]}$乗写像の逆写像) とする。XをK上の good reduction をもつ projective smooth variety とし、V_lをXのl進 cohomology 群 $\mathrm{H}^*_{et}(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_l)$ とすると、[KM] により、$P(V_l, u)$ はlによらずに $\mathbf{Z}[u]$ に属する。

(2.3.) Fontaine-Laffaille の理論 ([FL])

p 進 Hodge 理論で通常扱うのは $\mathbf{Q}_p$-係数の表現であるが、岩沢理論、特に、L-関数の p 進的な性質を考察するときには、$\mathbf{Z}_p$-lattice や torsion の様子を知ることは不可欠である。実は、絶対分岐指数が 1 の局所体の場合には若干の仮定の下で $\mathbf{Z}_p$-係数や torsion も扱うことができる。それが、Fontaine-Laffaille の理論である。

以下、$K = K_0$、O_KでKの整数環をあらわす。

O_K上の Dieudonne filtered module(以下、DMF という。)とは、減少 filtration$\{D^i\}_{i\in\mathbf{Z}}$とφ-linear 準同型 $\{f_i : D^i \to D\}$ をもつ有限生成 O_K-加群 Dで、条件

(ア) $\bigcup D^i = D, \quad \bigcap D^i = 0;$

(イ) $f_i|_{D^{i+1}} = pf_{i+1};$

(ウ) $D = \sum_{i\in\mathbf{Z}} f_i(D^i)$

を満たすものである。また、DMF の射とは、filtration および f_iを保つ O_K-加群の射である。

$a \leqq b$ とする。DMFDが type$[a, b]$ とは、

$$D^a = D \text{ かつ } D^{b+1} = 0$$

となることをいう。また、長さがn 以下とは、ある $b - a \leqq n$ が成り立つ $a, b \in \mathbf{Z}$ が存在して、Dの type が $[a, b]$ となることをいう。

定理 *I*． $b - a \leqq p - 2$ とすると、type が $[a, b]$ の DMF の圏は abel 圏である。

DMF から p 進表現を構成する共変関手

$$T : (\text{DMF of type } [2-p, 0]) \to (G_K \text{ の連続 } \mathbf{Z}_p\text{-表現})$$

を、$T(D) = \ker(1-f; \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_\infty \bigotimes_{O_K} D) \to \mathbf{B}_\infty \bigotimes_{O_K} D)$ で定義する。$\mathbf{B}_\infty$は Fontaine が定義した $\mathbf{Z}_p$-algebra で、Frobenius fと減少 filtration をもち、$\mathbf{Q}_p \bigotimes \mathbf{B}_\infty = \mathbf{B}_{\mathrm{crys}} \bigcap \mathbf{B}^0_{\mathrm{dR}}$ を満たす。

定理 *II*． Tは充満忠実である。さらに、$V(D) = \mathbf{Q}_p \bigotimes T(D)$ は crystalline 表現であり、filtration もこめて $\mathrm{DR}(V(D))(\cong \mathrm{Crys}(V(D))) \cong K \bigotimes D$となる。

一般の長さが $p-2$ 以下の DMF から表現を構成するには、filtration を shift することにより type が $[2-p, 0]$ になるようにしてTを施し、Tate-twist でもどせばよい。この構成は、filtration の shift の仕方によらない。

例 (ア) $D = O_K\{r\}$ $(D^r = O_K, D^{r+1} = 0, f_r = \varphi)$ とすると、$T(D) \cong \mathbf{Z}_p(r)$ となる。
例 (イ) $\mathcal{A}$ を O_K上の abelian scheme とする。

$$D = \mathrm{H}^1_{crys}(\mathcal{A} \bigotimes (O_K/p)/O_K), \qquad D^i \text{ は Hodge filtration}$$

とすると、標準的に $T(D) \cong \mathrm{H}^1_{et}(\mathcal{A}_{\bar{K}}, \mathbf{Z}_p)$ となる。一般に、type が $[-1, 0]$ の DMF の圏は O_K上の height が p べきの finite flat group scheme の圏に圏同値になる。

§3. Non-archimedean local field 上の motivic な有理点

(3.1.) H^1_* $(* = e, f, g)$ の定義

Vを l進表現とする。$l = p$ のとき、

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^1_e(K,V) &= \ker(\mathrm{H}^1(K,V) \to H^1(K, \mathbf{B}^{f=1}_{\mathrm{crys}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)) \\
\mathrm{H}^1_f(K,V) &= \ker(\mathrm{H}^1(K,V) \to H^1(K, \mathbf{B}_{\mathrm{crys}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)) \\
\mathrm{H}^1_g(K,V) &= \ker(\mathrm{H}^1(K,V) \to H^1(K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V))
\end{aligned}$$

とおく。また、$l \neq p$ のとき、

$$\mathrm{H}^1_e(K,V) = 0, \qquad \mathrm{H}^1_g(K,V) = \mathrm{H}^1(K,V)$$
$$\mathrm{H}^1_f(K,V) = \ker(\mathrm{H}^1(K,V) \to H^1(K^{nr},V))$$

と定める。$\mathbf{B}^{f=1}_{\mathrm{crys}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{crys}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ より、

$$\mathrm{H}^1_e \subset \mathrm{H}^1_f \subset \mathrm{H}^1_g \subset \mathrm{H}^1$$

である。$\mathrm{H}^1(K,V) \cong \mathrm{Ext}^1_{G_K}(\mathbf{Q}_p, V)$ とみるとき、Vが de Rham(crystalline) 表現ならば、

$$x \in \mathrm{H}^1_g \ (x \in H^1_f) \Leftrightarrow \ x \text{ に対応する extension は de Rham(crystalline) 表現}$$

となる。

T_lを l進表現 V_lの lattice、$\iota : T_l \to V_l$, $pr : V_l \to V_l/T_l$とする。$* \in \{e, f, g\}$ に対して、

$$\mathrm{H}^1_*(K,T_l) = \iota^{-1}\mathrm{H}^i_*(K,V_l)$$
$$\mathrm{H}^1_*(K,V_l/T_l) = pr_*\mathrm{H}^i_*(K,V_l)$$

と定める。また、$\hat{\mathbf{Z}}$-表現 Tに対して、

$$\mathrm{H}^1_*(K,T) = \prod \mathrm{H}^1_*(K,T_l)$$

と定義する。

p 進表現 Vに対して、Vの K上の tangent space を

$$t_V(K) = \mathrm{DR}(V)/\mathrm{DR}(V)^0$$

で表す。(2.1. エ) の完全系列に$\otimes V$して連続 cohomology をとることにより、

命題 . de Rham 表現 Vに対して、

(ア) $\mathrm{H}^1(K, \mathbf{B}^0_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) \to \mathrm{H}^1(K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$ は単射;
(イ) $\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{H}^1_f(K,V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} t_V(K) + \dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{H}^0(K,V)$;
(ウ) $\mathrm{H}^1_f(K,V)/\mathrm{H}^1_e(K,V) \cong \mathrm{Crys}(V)/(1-f)\mathrm{Crys}(V)$

が成り立つ。

(3.2.) Tate duality
定理 III .Vを l進表現 ($l=p$ のときは de Rham 表現)、Tをその lattice とする。Tate duality

$$\mathrm{H}^1(K,V)\times\mathrm{H}^1(K,V^*(1))\to\mathrm{H}^2(K,\mathbf{Q}_l(1))\cong\mathbf{Q}_l$$
$$\mathrm{H}^1(K,T)\times\mathrm{H}^1(K,V^*/T^*(1))\to\mathrm{H}^2(K,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(1))\cong\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$$

のもとで

$$\mathrm{H}^1_f(K,V)^\perp=\mathrm{H}^1_f(K,V^*(1)),\qquad \mathrm{H}^1_g(K,V)^\perp=\mathrm{H}^1_e(K,V^*(1))$$
$$\mathrm{H}^1_f(K,T)^\perp=\mathrm{H}^1_f(K,V^*/T^*(1)),\qquad \mathrm{H}^1_g(K,T)^\perp=\mathrm{H}^1_e(K,V^*/T^*(1))$$

となる。ただし、$(\cdot)^\perp$は直交補空間をあらわす。

(3.3.) Motivic points over non-archimedian local field and "exp" map
Vを de Rham 表現とする。写像 $\exp=\exp_V$ を (2.1. エ) の上の完全列に$\bigotimes V$して連続 cohomology をとったとき得られる連結準同型

$$t_V(K)=\mathrm{DR}(V)/\mathrm{DR}(V)^0\overset{\exp}{\to}\mathrm{H}^1_e(K,V)$$

とする。exp は全射で、その核は $\mathrm{Crys}(V)^{f=1}/\mathrm{H}^0(K,V)$ となる。特に、$P(V,1)\neq 0$ のとき、(3.1.) の命題より、exp は同型

$$t_V(K)\cong\mathrm{H}^1_f(K,V)$$

を与える。
$\widehat{\mathbf{Z}}$-表現 Tに対して、K上の motivic points の群 $A(K)=A(T,K)$ を

$$A(K)=\mathrm{H}^1_f(K,T)$$

と定める。$V_p=\mathbf{Q}_p\bigotimes_{\mathbf{Z}_p}T_p$が de Rham 表現かつ $P(V_p,1)\neq 1$ の仮定の下で、exp は同型 $t_V(K)\cong\mathbf{Q}_p\bigotimes A(K)$ を導く。Tが K上の Abel 多様体から来るときには、exp は古典的な exponential 写像と一致する。((3.4. 例 2) を見よ。) $A(K)$ の torsion については以下の命題が成り立つ。

命題 .Tを$\widehat{\mathbf{Z}}$-表現で、V_pが de Rham 表現かつ任意の l に関して、$P(V_l,1)\neq 0$ とする。このとき、次の同型が成り立つ。

$$A(K)_{tor}\cong\mathrm{H}^0(K,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}\bigotimes T)$$

(3.4.) 例 (ア) $T=\widehat{\mathbf{Z}}(r)$ のとき。$l\neq p$ ならば、$T_l=\mathbf{Z}_l(p)$ は不分岐より、

$$\mathrm{H}^1_f(K,T_l)\cong\begin{cases}\mathbf{Z}_l & (r=0)\\ \mathrm{H}^0(K,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(r)) & (r\neq 0)\end{cases}$$

となる。$l=p$ のときは (3.1.) の命題から、

$$\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{H}^1_f(K,V_p) = \begin{cases} 0 & (r<0) \\ 1 & (r=0) \\ [K:\mathbf{Q}_p] & (r \geqq 1) \end{cases}$$

$$\mathrm{H}^1_f(K,T_p) \cong \begin{cases} 0 & (r=0) \\ \mathrm{H}^0(K,\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(r)) & (r \neq 0) \end{cases}$$

となる。また、$\mathrm{H}^1_f(K,\mathbf{Q}_p(1))$ と $\mathrm{H}^1_g(K,\mathbf{Q}_p(1))$ とは 1 次元ずれているが、これは split multiplicative reduction をもつ Elliptic curve に実現される p-進表現で生成されていて、これらの表現は stable 表現といわれるものになる。
例 (イ) Xを K上の Abel 多様体とし、$T=\prod T_l$を Tate 加群とする。このとき、V_pは de Rham 表現である。([Fo1]) Kummer 系列

$$0 \to T \to \varprojlim_n X(\bar{K}) \to X(\bar{K}) \to 0$$

から導かれる連結準同型

$$\partial : X(K) \to \mathrm{H}^1(K,T)$$

の像は H^1_eの中に含まれ、

$$\begin{array}{ccc} \tan X & \xrightarrow{\exp} & \mathbf{Q}_p \otimes X(K) \\ \| & & \downarrow \partial \\ t_{V_p}(K) & \xrightarrow[\exp]{} & \mathrm{H}^1_e(K,T) \end{array}$$

は可換になる。ここで、$\tan X$は Xの原点での tangent space、上の exp は classical な exponential map をあらわす。よって、∂は同型になる。この例から、motivic points と exp は、代数群における有理点および exponential 写像の motif への一般化になっていることがわかる。
例 (ウ) K上の Elliptic curve$E$に対して、$T_p(E)$ を p 進 Tate 加群とし、

$$T = \mathrm{Sym}^r_{\mathbf{Z}_p} T_p(E) \qquad (r \geqq 1)$$

とする。$V_p(E) = \mathbf{Q}_p \otimes T_p(E)$ は de Rham 表現より、対称積 $V=\mathbf{Q}_p \otimes T$も de Rham 表現であり、

$$\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{H}^1_f(K,V) = r[K:\mathbf{Q}_p]$$

となる。なぜならば、Kを高々有限次拡大で置き換えることにより Eの Neron model は semi-stable reduction をもつとしてよく、$\mathrm{H}^0(K,V)=0$ である。Weil 予想から $P(V,1) \neq 0$ となるから、(3.1.) の命題から

$$\mathrm{H}^1_e(K,V) = \mathrm{H}^1_f(K,V)$$

となる。(Eが multiplicative reduction で potential good でないときは $\dim_{K_0}\mathrm{Crys}(V)=1$、additive reduction のときは、$\dim_{K_0}\mathrm{Crys}(V)=0$ になっている。) また、$r\neq 2$ のとき、$\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{H}^1_f(K,V^*(1))=r[K:\mathbf{Q}_p]$ かつ $\mathrm{Crys}(V^*(1))^{f=1}=(0)$ となり、

$$\mathrm{H}^1_f(K,V)=\mathrm{H}^1_g(K,V)$$

である。$r=2$ のときは、$\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{End}_{G_K}(V_p)=1$ または 2 の場合があり、それぞれ $\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{H}^1_f(K,V^*(1))=r[K:\mathbf{Q}_p]$ または $r[K:\mathbf{Q}_p]+1$ となる。(Eが ordinary good reduction ならばいつも $\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{End}_{G_K}(V_p)=1$ である。) さらに、Eが good reduction をもつときは、$\mathrm{ord}_{u=1}P(V,u)=1$ から $\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Crys}(V^*(1))^{f=1}=1$ で、

$$\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{H}^1_g(K,V)=\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{H}^1_f(K,V)+1$$

となり、bad reduction をもつときは、$\mathrm{H}^1_f(K,V)=\mathrm{H}^1_g(K,V)$ となる。

§4. Local L の値

(4.1.) Vを $P(V,1)\neq 0$ なる l進表現とする。

定理 *IV* (ア) .$l\neq p$ とすると、$\mathrm{H}^1_f(K,V)=0$ となる。さらに、Vが不分岐ならば、Vの $\mathbf{Z}_l$-lattice$T$に対して、

$$\sharp\mathrm{H}^1_f(K,T)=|P(V,1)|_l^{-1}$$

となる。ここで、$|\cdot|_l$は、$|l|_l=l^{-1}$と正規化された絶対値とする。
(イ) $l=p$、$K=K_0$、Vは crystalline 表現とし、ある長さが $p-2$ 以下の DMF Dが存在して、

$$V=\mathbf{Q}_p\bigotimes T(D)$$

とする。μを exp による像を通して D/D^0の total measure が 1 になる $\mathrm{H}^1_f(K,V)$ の Haar measure とすると、

$$\mu(\mathrm{H}^1_f(K,T))=|P(V,1)|_p^{-1}$$

となる。

定理 IV.(イ) の仮定は、$\dim_X\leqq(p-2)/2$ となる good reduction をもつ proper smooth variety に対して成り立つ。([Fa][K2])

(4.2.) $\widehat{\mathbf{Z}}(r)(r\geqq 2)$ の場合には explicit reciprocity law の exponential 写像を用いた解釈により次が成り立つ。(この場合は、$\mathrm{H}^1_e=\mathrm{H}^1_f=\mathrm{H}^1_g=\mathrm{H}^1$となることに注意せよ。((3.4.) 例 (ア)))

定理 *V* .pを奇素数、Kを $\mathbf{Q}_p$の有限次不分岐拡大、$r\geqq 2$ とする。$\mathrm{H}^1(K,\widehat{\mathbf{Z}}(r))$ 上の Haar measure μ_pを exponential 写像

$$\exp: K\to \mathrm{H}^1(K,\widehat{\mathbf{Z}}(r))\bigotimes\mathbf{Q}_p$$

から導かれたものとする。このとき、

$$\mu_p(\mathrm{H}^1(K,\widehat{\mathbf{Z}}(r)))=(1-q^{-r})|(r-1)!|_K\sharp\mathrm{H}^0(K,\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-r))$$

となる。ただし、qは Kの剰余体の位数、$|\cdot|_K$は Kの正規化された絶対値 ($|p|_K=q^{-1}$) とする。

参考文献

[B] Bloch, S., *A note on height pairings, Tamagawa numbers and Birch and Swinerton-Dyer conjecture*, Invent. Math. **58** (1980), 65–76.

[BK] Bloch, S. and K. Kato, *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, Grothendieck Festschrift I, Progress in Math. **86** (1990), Birkhäuser, 333–400.

[D] Deligne, P., *La conjecture de Weil I*, Publ. Math. IHES **43** (1974), 273–307.

[Fa] Faltings, G., *Crystalline cohomology and p-adic etale cohomology*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory (1989), The Johns Hopkins University Press, 25–80.

[Fo1] Fontaine, J.-M., *Sur certain types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps locaux ; construction d'un annuau de Barsotti-Tate*, Ann. of Math. **115** (1982), 529–577.

[Fo2] Fontaine, J.-M., *Le corps des périods p-adiques*, Astérisque **223** (1994), 59–101.

[Fo3] Fontaine, J.-M., *Représentations p-adiques semi-stables*, Astérisque **223** (1994), 113–184.

[FI] Fontaine, J.-M. and Illusie, L., *p-adic periods*, Indo-French conf. on geom. Bombay (1989).

[FL] Fontaine, J.-M. and Laffaille, G., *Construction de représentation p-adiques*, Ann. Sc. ENS **15** (1982), 547–608.

[FM] Fontaine, J.-M. and Messing, W., *p-adic periods and p-adic etale cohomology*, Cont. Math. **67** (1987), 179–207.

[FP] Fontaine, J.-M. and Perrin-Riou, B., *Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L*, Motives (1994), AMS.

[I] Illusie, L., *Cohomologie de de Rham et cohomologie de étale p-adique (d'apres G. Faltings, J.-M. Fontaine et al.)*, Sem. Bourbaki **726** (1990).

[K1] Kato, K, *Expricit reciprocity law and cohomology of Fontaine-Messing*, Bull. Soc. Math. France **119** (1991), 397–441.

[K2] Kato, K, *Semi-stable reduction and p-adic etale cohomology*, Astérisque **223** (1994), 269–293.

[K3] Kato, K, *Expricit reciprocity law* と *zeta* の値, 数理研講究録 **810** (1992), 264–279.

[K4] Kato, K, *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functon via* $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, Lecture Notes in Math. **1553** (1993), Springer-Verlag, 50–163.

[KM] Katz, N. and Messing, W., *Some consequences of Riemann hypothesis for varieties over finite fields*, Invent. Math. **23** (1974), 73–77.

[P] Perrin-Riou, B., *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local*, Invent. Math. **115** (1994), 81–149.

[W] Weil, A., *Adeles and algebraic groups*, Progress in Math. **23** (1982), Birkhäuser.